KETAKTERHINGGAAN: SEBUAH TANTANGAN DALAM MATEMATIKA

Hendra Gunawan
KK Analisis dan Geometri, FMIPA ITB
Draf Pertama, 14 September 2020

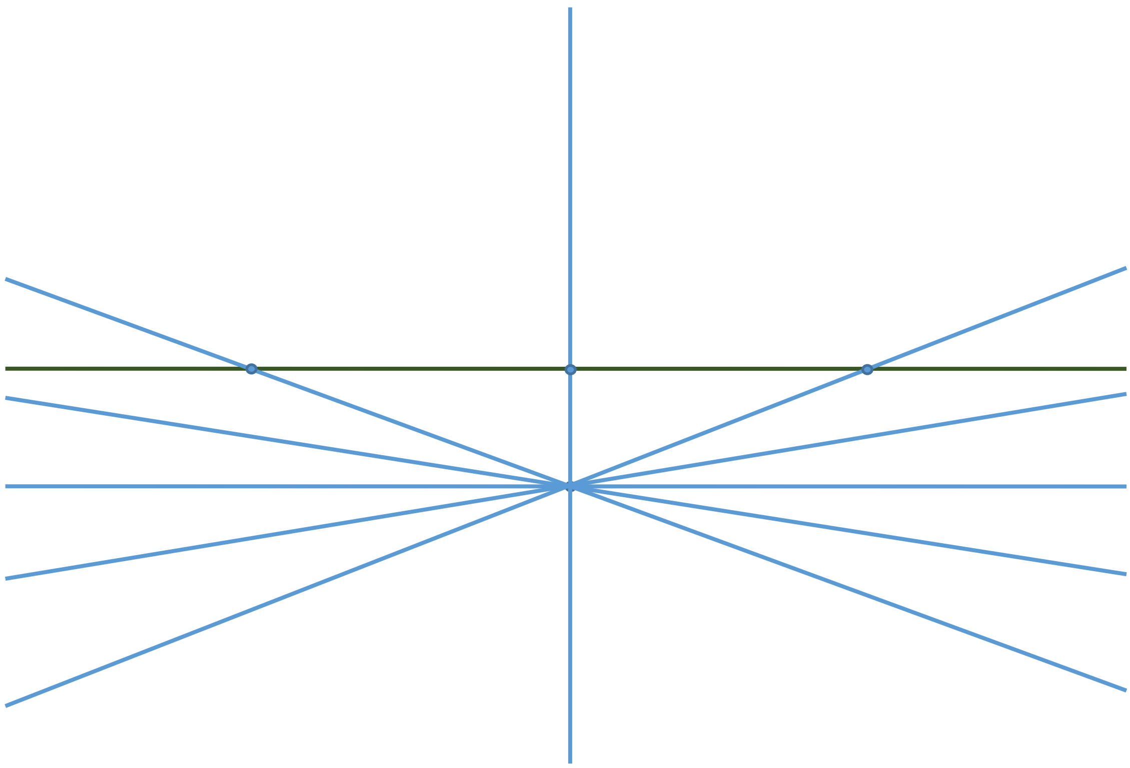
Baru-baru ini, Lisa Piccirillo dan Nina Holden, dua matematikawan muda dari Massachusetts Institute of Technology (MIT), Amerika Serikat, dikabarkan akan mendapat anugerah dari *The Breakthrough Prize Foundation*. Lisa Piccirillo, seorang asisten professor di MIT, akan mendapat 2021 *Maryam Mirzakhani New Frontiers Prize* atas keberhasilannya memecahkan masalah klasik dalam teori knot terkait dengan 'teka-teki' apakah knot Conway merupakan suatu keping dari sebuah knot berorde tinggi yang lebih rumit. Sementara itu, Nina Holden, doktor matematika lulusan MIT yang saat ini bekerja di ETH Zurich, akan mendapat anugerah yang sama atas hasil penelitiannya dalam geometri random pada Gravitasi Kuantum Liouville, yang mempunyai kemiripan dengan *random walk* dalam teori peluang.

Dalam matematika, ada banyak masalah yang belum terpecahkan dan membuat para matematikawan penasaran. Beberapa masalah tersebut bahkan ada yang telah 'berusia' puluhan hingga ratusan tahun. Anda mungkin pernah mendengar tentang Teorema Terakhir Fermat yang berhasil dibuktikan oleh Andrew Wiles pada tahun 1995. Teorema ini pertama dicetuskan oleh Pierre de Fermat pada tahun 1637. Ketika itu, Fermat menulis pada tepi halaman buku *Arithmetica* karya Diophantus, matematikawan Yunani Kuno, bahwa untuk bilangan asli $n \geq 3$, tidak terdapat bilangan bulat a, b dan c sedemikian sehingga $a^n + b^n = c^n$. Ia menyatakan bahwa ia telah menemukan buktinya, tetapi tepi halaman tersebut terlalu kecil untuk memuat buktinya. Sejumlah matematikawan kemudian mencoba membuktikannya dan tidak berhasil. Baru 358 tahun kemudian, Andrew Wiles, matematikawan Inggris, mempublikasikan buktinya di *Annals of Mathematics*.

Di antara sekian banyak masalah matematika yang hingga saat ini belum terpecahkan, ada sebuah masalah yang terkait dengan bilangan, objek paling mendasar dalam matematika. Namun, masalahnya menjadi sulit karena yang dihadapi bukan sekadar sebuah bilangan, melainkan himpunan bilangan dan konsep ketakterhinggaan serta kardinalitas himpunan. Masalah itu menyangkut kebenaran Hipotesis Kontinum, yang menyatakan bahwa tidak ada himpunan yang memiliki kardinalitas di antara kardinalitas himpunan bilangan asli dan kardinalitas himpunan bilangan real. Hipotesis ini dicetuskan oleh Georg Cantor pada tahun 1878, dan pembuktiannya dinyatakan sebagai salah satu masalah terbuka oleh David Hilbert pada tahun 1900. Hingga saat ini, belum ada yang berhasil membuktikan (atau menyangkal) kebenaran Hipotesis Kontinum.

Konsep ketakterhinggaan, khususnya, memang merupakan suatu konsep matematika yang tidak mudah dan telah menjadi perdebatan sejak dua setengah milenium yang lalu. Karena abstrak dan membingungkan, beberapa di antara para filsuf Yunani Kuno memilih untuk menolak konsep ketakterhinggaan. Zeno, misalnya, mengungkapkan penolakannya terhadap ketakterhinggaan melalui sebuah paradoks: balapan lari antara Achilles dan kura-kura. Sang kura-kura memulai balapan 1 km di depan Achilles, dan berlari dengan kecepatan 1 km/jam (memakai papan luncur), sementara Achilles berlari santai dengan kecepatan 2 km/jam (karena ia yakin akan menang). Namun, kata Zeno, Achilles tidak akan menang: pada saat ia sampai di posisi 1 km, kura-kura telah berada di posisi 1½ km, dan pada saat Achilles sampai di posisi 1½ km, kura-kura telah berada di posisi 1¾ km, dan seterusnya Achilles akan selalu berada di belakang kura-kura. Pada saat itu, konsep deret tak terhingga belum dikenal, sehingga muncullah paradoks ini --- paradoks Zeno.

Selain Zeno, Aristoteles juga tidak menerima konsep ketakterhinggaan. Menurut Aristoteles, kita dapat melukis garis sepanjang-panjangnya, tetapi selalu terhingga. Bila ada garis yang tak terhingga panjangnya, Aristoteles "menemukan" adanya kejanggalan: bagaimana mungkin jarak tak terhingga dapat ditempuh dalam waktu terhingga. "Itu mustahil," katanya; "karena itu ketakterhinggaan tidak boleh ada."



Bila kita berbicara tentang alam fisis, segala sesuatu memang terhingga. Kecepatan cahaya di ruang hampa 'hanya' 300.000 km per detik. Banyak sel dalam tubuh manusia 'hanya' 100 trilyun. Diameter alam semesta yang dapat dilihat (*observable universe*) 'hanya' $9{,}2 \times 10^{26}$ meter. Bilangan terbesar di alam fisis adalah densitas alam semesta, yaitu $5{,}1 \times 10^{96}$ kilogram per meter kubik. Dalam matematika, bilangan besar yang diberi nama adalah 1 googol = 10^{100}, dan 1 googolplex = 10^{googol}. (Bila seorang siswa dihukum oleh gurunya untuk menulis bilangan 10000....00000 sepanjang-panjangnya di papan tulis, siswa tersebut mungkin menulis bilangan yang lebih besar dari 1 googol --- yang melampaui densitas alam semesta.) Namun matematikawan bisa 'bermain' dengan bilangan asli yang banyaknya melampaui 1 googolplex tanpa menghiraukan apakah bilangan tersebut menyatakan sesuatu di alam semesta ini.

Selain bilangan-bilangan besar, di alam fisis, ada pula bilangan-bilangan yang sangat kecil, misalnya: massa sebuah elektron yang diam atau stasioner $9{,}11 \times 10^{-31}$ kilogram. Namun, dalam matematika, kita dapat berbicara tentang bilangan 10^{-100} atau yang lebih kecil lagi, tetapi masih bernilai positif. Dalam pendefinisian limit fungsi di suatu titik, misalnya, matematikawan menggunakan konsep infinitesimal, yang melibatkan bilangan-bilangan sembarang kecil itu.

Kembali ke Aristoteles, ia benar tentang alam fisis, tetapi, seperti kata Plato, matematika adalah dunia gagasan. (Dalam dunia gagasan, ruang tak terbatas. Kita dapat berbicara tentang garis yang tak terhingga panjangnya, walau kita tidak dapat melukiskannya.) John Wallis (1616-1703), matematikawan Inggris, adalah orang yang pertama kali menggunakan lambang ∞ untuk menyatakan ketakterhinggaan dan $1/\infty$ untuk 'infinitesimal', bilangan yang tak terhingga kecilnya, sebelum Newton mengembangkan Kalkulus. Konsep infinitesimal merupakan cikal bakal revolusi industri, tapi saya tidak akan bercerita tentang hal tersebut di sini. Oh ya, Wallis menemukan sebuah rumus untuk bilangan π, yaitu:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot \ldots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot \ldots}$$

yang baru-baru ini ditemukan aplikasinya dalam fisika kuantum.

Ketakterhinggaan merupakan sebuah *test case* bagi manusia (khususnya matematikawan), seberapa jauh manusia dapat memahaminya, tanpa terganggu oleh intuisinya. Sebagai ilustrasi, marilah kita tengok bilangan asli: 1, 2, 3, 4, 5, dan seterusnya. Ada berapa banyak bilangan asli ini? Jawabannya takterhingga. Namun, seberapa banyak takterhingga itu? Untuk menjelaskannya, ada kisah matematis tentang sebuah hotel bernama Hotel Hilbert. Hotel ini memiliki kamar sebanyak bilangan asli, kamar nomor 1, 2, 3, dan seterusnya. Suatu ketika, kamar telah terisi penuh. Lalu ada seorang tamu datang dan ingin menginap di Hotel Hilbert.

Sang resepsionis binggung, bertanya kepada Manajer Hotel. Kata Manajer Hotel, mudah saja: tamu di kamar nomor 1 tinggal dipindahkan ke kamar nomor 2, tamu di kamar nomor 2 ke kamar nomor 3, tamu di kamar nomor 3 ke kamar nomor 4, dan seterusnya. Nah, kamar nomor 1 yang sekarang telah kosong bisa diberikan kepada tamu baru.

Bila anda merasa telah mengetahui banyaknya bilangan asli, bagaimana dengan bilangan bulat (yang terdiri atas bilangan bulat positif, 0, dan bilangan bulat negatif)? Apakah bilangan bulat lebih banyak daripada bilangan asli? Ternyata kita dapat memadankan setiap bilangan bulat satu per satu dengan bilangan asli, dengan urutan $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$. Dalam Teori Himpunan, ini berarti bahwa himpunan bilangan bulat mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan asli.

Serupa dengan himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional juga mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan asli, karena, meminjam istilah anak saya, kita dapat 'mengabsen'-nya satu per satu. Sekali lagi saya harus memperingatkan anda: jangan terkecoh oleh intuisi anda. Intuisi penting, tetapi matematikawan mengandalkan kemampuan berpikir yang dipandu oleh logika yang ketat.

Apakah semua bilangan dapat dipadankan dengan bilangan asli? Nah, Georg Cantor --- matematikawan Jerman, penggagas teori himpunan --- membuktikan bahwa bilangan real ternyata 'jauh lebih banyak' daripada bilangan asli. Bila kita mencoba mendaftarkan atau mengabsennya, kita akan gagal: selalu ada bilangan yang terlewat. Hal ini dibuktikan oleh Cantor dengan suatu metode, yang kemudian dikenal sebagai Metode Diagonalisasi Cantor. Sebagai konsekuensi dari temuan Cantor, matematikawan menyadari bahwa ketakterhinggaan itu bertingkat. Ketakterhinggaan himpunan bilangan asli **N** merupakan ketakterhinggan tingkat pertama (disebut alef-nol). Lalu ada ketakterhinggaan tingkat berikutnya (disebut kontinum), yang menyatakan kardinalitas himpunan bilangan real **R**.

Belakangan, matematikawan juga bisa 'melihat' (dengan kemampuan berpikirnya) bahwa kardinalitas himpunan bilangan real sama dengan kardinalitas himpunan dari semua himpunan bagian dari **N**, yang dilambangkan dengan $2^{\mathbf{N}}$. Nah, Georg Cantor melangkah lebih jauh, bila dari **N** ia peroleh $2^{\mathbf{N}}$ yang kardinalitasnya lebih besar daripada **N**, maka dari $2^{\mathbf{N}}$ ia bisa memperoleh $2\text{^}(2^{\mathbf{N}})$ yang kardinalitasnya lebih besar daripada $2^{\mathbf{N}}$, dan seterusnya --- *ad infinitum*. Sampai di sini, Anda mungkin perlu menghela nafas. "*Welcome to Cantor's Heaven*!"

Hingga hari ini, temuan Cantor menyisakan satu pertanyaan: apakah memang tidak ada himpunan di antara **N** dan **R** yang memiliki kardinalitas lebih besar daripada alef-nol, tetapi lebih kecil daripada kontinum? Menurut Cantor, tidak ada. Klaim inilah yang kemudian dikenal sebagai Hipotesis Kontinum. Cantor sendiri tidak dapat membuktikannya, dan hingga saat ini belum ada matematikawan yang dapat membuktikannya.

"*Mathematics is a young man's game*", demikian kata Godfrey Harold Hardy --- matematikawan Inggris (1877-1947) --- dalam bukunya yang berjudul "*A Mathematician's Apology*". Mungkin ada matematikawan muda di antara pembaca artikel ini yang tertantang untuk mempelajari Hipotesis Kontinum dan pada suatu hari nanti berhasil membuktikannya?***

Daftar Pustaka

[1] J. Chu, "Four from MIT awarded 2021 New Horizons in Physics and New Frontiers in Mathematics Prizes", *MIT News*, 10 September 2020

[2] P.J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Publications, 2008

[3] H. Gunawan, *Menuju Tak Terhingga*, Penerbit ITB, 2016

[4] G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940